1ª OMM – Primeira Olimpíada Moge de Matemática

Caderno de questões

❖ Dados do participante:

Nome: ____

Série/Turma: ___________

Nível da prova: (__) 9º ano, (__) Ensino Médio

Data: 07/12/2024

❖ Regras para realização da prova:

1. Preencha todo caderno de respostas apenas com caneta azul ou preta;
2. É proibido utilizar aparelhos analógicos e/ou eletrônicos que contenham informações externas à prova e que não tenham sido explicitamente permitidas no regulamento divulgado;
3. Assinar lista de presença ao final da prova e antes de deixar o local de prova;
4. Cada questão aqui chamada de “fechada” tem apenas uma única alternativa correta;
5. O tempo máximo de prova é de 3 horas e o mínimo de 2 horas. O participante só poderá se ausentar do local de prova com a clara autorização do fiscal.

❖ Rascunho para o gabarito:

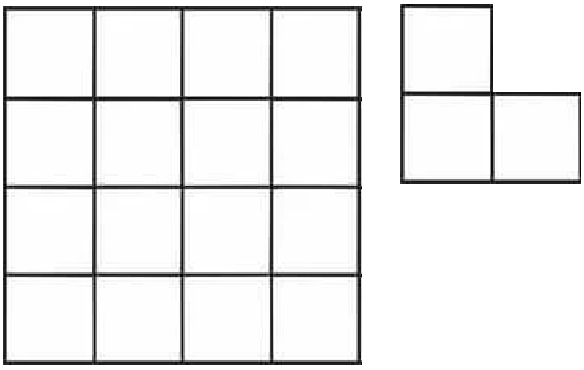
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Obs.: Note que este rascunho serve apenas para sua conferência pessoal, mas não contará para nota e/ou classificação na olimpíada.

Fechadas

Questão 1

São dados um tabuleiro e uma peça conforme mostra a figura ao lado. De quantas maneiras diferentes podemos colocar a peça no tabuleiro de modo que ela cubra completamente 3 casas?



a) 48
b) 32
c) 36
d) 24
e) 16

Questão 2

Um aluno começou a escrever a seguinte sequência:

$$MOGEGOMOGEGOMOGEGO\ \ldots$$

Qual será o 2024º termo desta sequência?

a) M
b) O
c) G
d) E
e) Não consigo calcular.

Questão 3

Em um anime, o protagonista Luxiat foi trazido do mundo normal para uma outra dimensão em uma vila que é comum ter dragões e guerreiros. Nesse novo mundo, Luxiat aproveita seu conhecimento antigo sobre matemática e estuda qual a melhor maneira de domar e cuidar dos dragões.

Um dos dragões, o Calmaria, busca 30 kg de peixe a cada 3 dias; enquanto outro dragão, o Alegria-do-Dia, busca 50 kg de peixe a cada 2 dias. Considerando apenas os dias que os dois dragões buscam peixes juntos, qual foi a quantidade de peixes que Luxiat guardou em 30 dias?

a) 1050 kg.

b) 400 kg.

c) 300 kg.

d) 650 kg.

e) 750 kg.

Questão 4

Carl F. Gauss (1777-1985) foi um dos mais brilhantes matemáticos de todos os tempos. Quando tinha 10 anos, seu professor pediu para a turma que calculasse a soma de 1 a 100, e em poucos minutos Gauss deu o resultado correto deixando seu professor espantado. O professor pediu que ele explicasse como fez a conta tão rápido, Gauss então disse que tinha observado que na soma de 1 a 100 aparecem 50 pares que somam 101. Assim:

$$1+2+3+\cdots+98+99+100$$

$$\underbrace{(1+100)+(2+99)+\cdots+(50+51)}_{\text{50 parcelas}}=5050$$

A soma de: $1+3+5+\cdots+2023+2025$

a) 999.999

b) 1.002.001

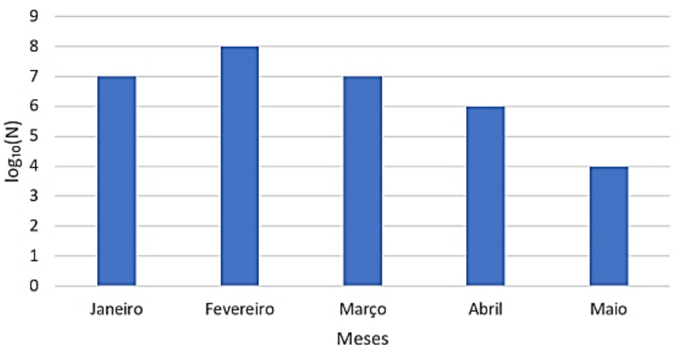
c) 1.026.169

d) 2.004.002

e) 2.052.238

Questão 5

Um estudante de economia estava analisando o comportamento das finanças de um grupo de investidores de criptomoedas. Em um primeiro momento, ele percebeu que a equipe estava motivada e conseguiu captar um enorme montante para investir, pois o valor da criptomoeda que eles focaram estava subindo. Mas, ao longo dos meses, notou uma grande influência da política e de eventos do país, como jogos internacionais e shows de artistas famosos, que fizeram que os olhares saíssem da criptomoeda. Com isso, o efeito de bolha da criptomoeda estourou e seu valor caiu bastante. No gráfico abaixo vemos uma simplificação dos investimentos desse grupo, onde $\mathbf{N}$ indica o valor em reais investido:



A partir do gráfico, determine o quanto de dinheiro foi perdido do mês de fevereiro até o mês de abril.

a) R$1,00.

b) R$2,00.

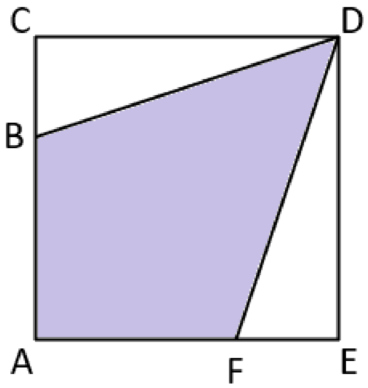
c) R$9.000.000,00.

d) R$9.990.000,00.

e) R$99.000.000,00.

Questão 6

A região ABDF destacada na figura fica dentro de um lote quadrado com lado $\mathrm{AE} = 6\ \mathrm{m}$. Pedro e seu pai mediram o perímetro de ABDF com seus passos. Pedro saiu de A foi até B e daí a D e seu pai fez o percurso de A até F e depois até D. No final viram que percorreram a mesma distância. Considerando que o passo de Pedro mede 56 cm e o passo de seu pai tem 72 cm e que o número de passos de cada um foi um número inteiro, qual o perímetro máximo de ABDF?



a) 504

b) 1008

c) 1512

d) 2016

e) 2520

Questão 7

Um dentista estava fazendo uma pesquisa sobre o formato da arcada dentária de seus pacientes, e notou em seu artigo que a forma mais comum era de uma parábola. Para facilitar os seus estudos, ele padronizou que iria deixar sempre o dente esquerdo mais ao fundo da boca, como sendo a origem de um sistema de coordenadas cartesianas, e que os dentes seriam representados por uma parábola desenhada primordialmente no primeiro quadrante. Note que cada arcada, superior ou inferior, de cada paciente era representada por uma parábola diferente.

Um paciente com um caso especial tinha o dente direito do fundo da boca localizado no ponto (6; 0). Mas o que o tornava especial para o dentista era que os dentes caninos não eram simétricos na boca, enquanto um deles ficava no ponto (1; 5), em cima da própria parábola, o outro ficava 1,5 unidade abaixo da ordenada que deveria ser para ficar em cima da parábola ideal.

Sabendo que o vértice da parábola se encontrava exatamente entre os dois dentes incisivos centrais, localizada no ponto (3; 9), o outro canino ficava em qual ponto?

a) (5; 6,5).

b) (5; 5).

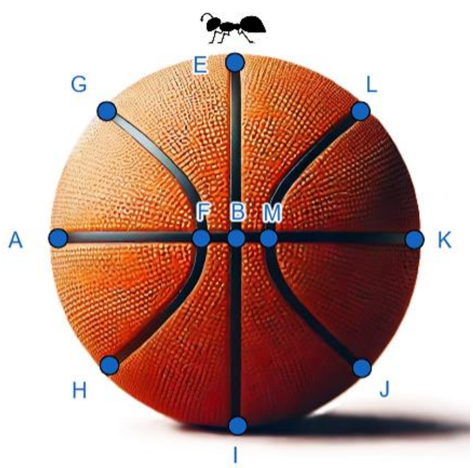
c) (5; 4,5).

d) (5; 3,5).

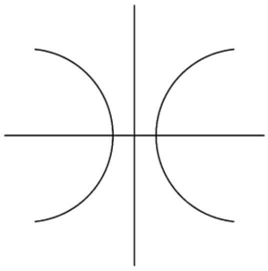
e) (5; 1).

Questão 8

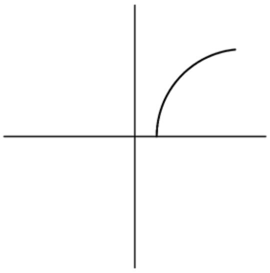
Após um jogo cansativo de basquete, João foi descansar e deixou a bola ao seu lado. Coincidentemente, uma formiga começou a andar sobre ela. Caminhando apenas pelas linhas da bola de basquete, a formiga sai do ponto E, em direção ao ponto I, passando pelo ponto B. Em seguida, ela sai do ponto I e vai para o ponto A, passando por F. Depois, ela caminha de A até o ponto L, passando por M. Por fim, sai de L e termina em K, passando por M. Dentre as alternativas abaixo, escolha aquela que melhor represente a projeção ortogonal do percurso da formiga.



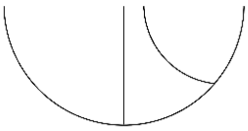
a)



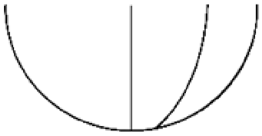
b)



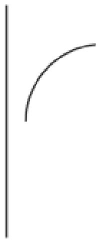
c)



d)

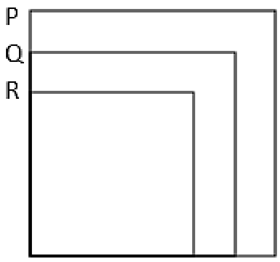


e)



Questão 9

Temos três quadrados um sobre o outro. O quadrado menor tem 361 cm² de área e o quadrado maior tem 400 cm². Sabendo-se que os segmentos PQ e QR tem a mesma medida, diga qual a área do quadrado do meio.



a) 20,5 cm²

b) 39 cm²

c) 370,5 cm²

d) 380,25 cm²

e) 395,75 cm²

Questão 10

Um livro raro foi roubado de uma biblioteca e há quatro suspeitos: Alice, Bruno, Carla e Daniel. Durante o interrogatório, eles fazem as seguintes declarações:

Alice: – Bruno é o culpado.

Bruno: – Carla é a culpada.

Carla: – Eu não sou a culpada.

Daniel: – Bruno mente quando diz que Carla é a culpada.

Sabendo que apenas um dos quatro disse a verdade, determine se é possível, apenas com esses dados, identificar o culpado. Caso afirmativo, identifique quem foi.

a) Alice

b) Bruno

c) Carla

d) Daniel

e) Não é possível

Abertas

Questão 11

Os poliedros de Platão são sólidos geométricos que possuem características em comum, como:

- Todas as faces têm o mesmo número de arestas
- Todos os vértices têm o mesmo número de arestas
- São convexos
- Cumprem a relação de Euler

Platão demonstrou que somente existem cinco: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

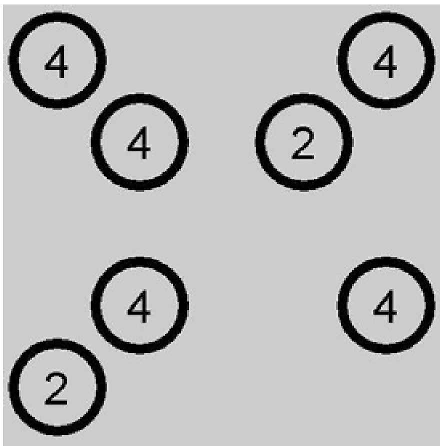
(a) Sabendo que o volume do icosaedro regular é dado pela fórmula $V = \frac{5(3+\sqrt{5})}{12}\, a^3$, em que a é o valor da aresta. Calcule o volume de icosaedro cuja aresta mede $18\ \mathrm{cm}$.

(b) Qual é a área total de um icosaedro regular cujo volume vale $V = \frac{3645+1215\sqrt{5}}{4}\ \mathrm{m}^3$?

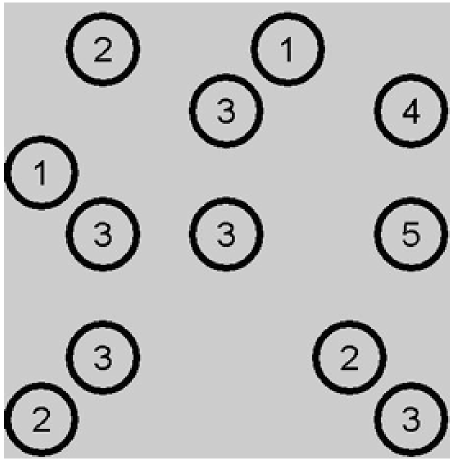
Questão 12

Desenhe pontes para ligar as ilhas umas às outras sem cruzá-las e formando uma figura interligada. Em cada ilha deve chegar tantas pontes quanto for o número marcado na ilha. Só é permitido ligar ilhas contíguas por 2 pontes no máximo.

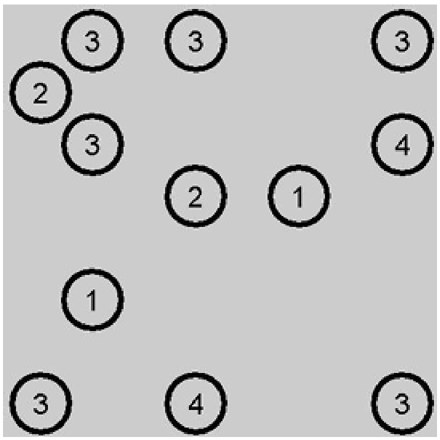
a)



b)



c)



Questão 13

Um designer estava projetando um jogo em que o avatar é sempre criado nas coordenadas $\mathrm{x} = 0$, $\mathrm{y} = 0$ e $\mathrm{z} = 0$ de um sistema de coordenadas usual, sendo que os valores de x e y mostram sua localização horizontal e o valor de z mostra sua altitude. Horizontalmente o avatar pode ficar em coordenadas de qualquer valor real e, verticalmente, apenas valores reais de -64 até 256.

Além disso, o jogador também pode se localizar por um mapa apenas visual, sem qualquer número, o qual seu avatar fica segurando e que mostra apenas sua localização horizontal. Para que o programa que configura o mapa não fique pesado demais, o designer deixou com que cada mapa apenas possa mostrar a localização de quadrados de 16 unidades de lado, necessariamente mostrando ou de 0 a 16, ou 16 a 32, ou 32 a 48, e assim por diante; ou seja, um mapa pode mostrar a região de $\mathrm{x} = 0$ até $\mathrm{x} = 16$ e $\mathrm{y} = 0$ até $\mathrm{y} = 16$, mas não de $\mathrm{x} = 5$ até $\mathrm{x} = 21$, por exemplo.

Assim que o avatar segura um mapa em sua mão, o mapa sempre tem dimensão de 64 por 64 pixels, ou seja, as 16 unidades das coordenadas horizontais são indicadas por 64 pixels no mapa. O máximo que o jogador consegue fazer para se localizar pelo mapa, é analisar a quantidade de pixels que ele está do ponto luxit do mapa, que é o ponto que indica as coordenadas x e y que sejam mais próximas do 0 (zero), o qual fica brilhando no mapa em sua mão.

Com essas informações, e sabendo que o jogador pode construir o que quiser pelo mapa, responda o que se pede:

a) Se o avatar do jogador viajou até a posição $\mathrm{x} = 245$ e $\mathrm{y} = 316$, indique a quantidade de pixels que ele está do ponto luxit do mapa atual.

b) Se o jogador quer construir uma casa para que ela apareça em apenas um único mapa, com um desenho de 44 por 16 pixels, e considerando que ele comece a construir a casa na mesma coordenada que seu avatar é criado, qual é o maior valor de x e o maior valor de y que essa casa será construída?

c) Sabe-se que a distância em pixels sempre deve ser indicada por números inteiros. Se colocássemos todos os mapas necessários próximos um do outro de modo que fosse possível fazer um segmento de reta do ponto que o avatar estava no item (a) até o ponto mais próximo de sua casa construída no item (b), quantos pixels esse segmento teria?

1ª OMM – PRIMEIRA OLIMPÍADA MOGE DE MATEMÁTICA

Caderno de respostas – Ensino Médio

❖ Dados do participante:

Nome: ____

Série/Turma: __________

Nível da prova: (__) 9º ano, (__) Ensino Médio

Data: 07/12/2024

❖ Regras para preenchimento desse caderno de respostas:

1. Preencha todo caderno de respostas apenas com caneta azul ou preta;
2. Assinar lista de presença ao final da prova e antes de deixar o local de prova;
3. Cada questão aqui chamada de "fechada" tem apenas uma única alternativa correta;
4. As respostas das questões aqui chamadas de "abertas" devem estar completamente escritas à caneta, sendo que qualquer parte escrita à lápis será desconsiderada;
5. As respostas das questões "abertas" devem ter algum tipo de raciocínio e/ou justificativa, e devem ser escritas exclusivamente dentro dos espaços reservados. Caso erre alguma parte já escrita à caneta, o fiscal indicará em lousa como proceder;
6. O tempo máximo de prova é de 3 horas, sendo que o tempo mínimo de prova é de 2 horas. O participante só poderá se ausentar do local de prova com a clara autorização do fiscal.

❖ **Gabarito oficial:**

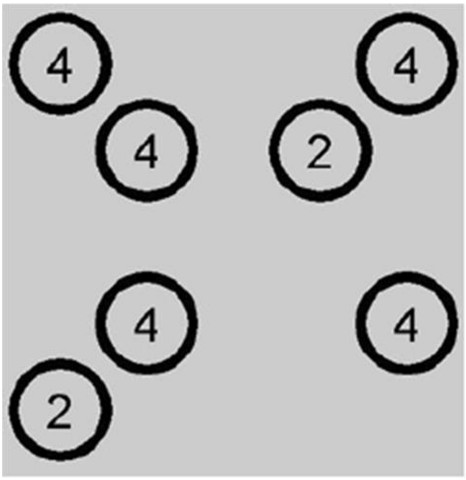
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Obs.: Cuidado ao escrever nesse espaço, pois qualquer rasura poderá anular a respectiva resposta.

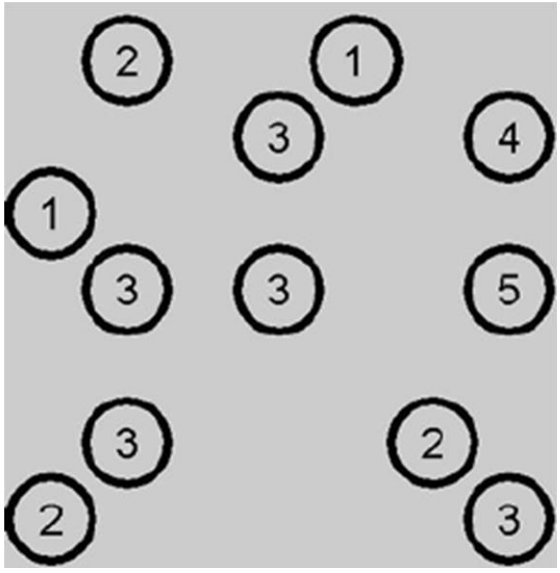
Resolução da questão 11:

Resolução da questão 12:

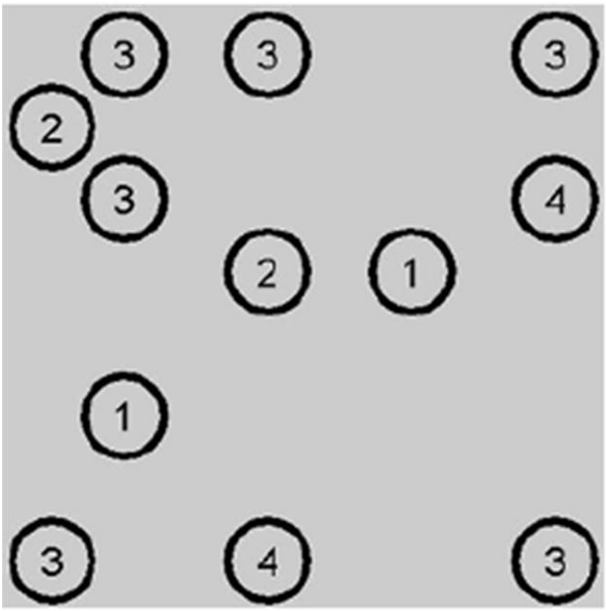
a)



b)



c)



Resolução da questão 13: